

گروه آموزشی : ریاضی

تاریخ : ۱۳۹۳/۹/۲

وقت : ۷۵ دقیقه



دانشکده ریاضی

امتحان میان ترم درس : ریاضی ۲- فنی (۶ گروه هماهنگ)

نیمسال (اول / دوم) ۱۳۹۴ - ۱۳۹۳

نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام مدرس :

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ - معادله صفحه ای را بنویسید که از فصل مشترک دو صفحه $P_1: 7x - 4y + 7z + 16 = 0$ و

۱۰ نمره $P_2: 4x + 3y - 2z + 13 = 0$ بگذرد و بر صفحه $P_3: x - y - 2z + 5 = 0$ عمود باشد.

سوال ۲ - منحنی $r(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2)$ روی چه سطحی (رویه ای) واقع است؟

۱۵ نمره آن را رسم کرده و انحنای منحنی را در نقطه $t = \pi$ به دست آورید.

سوال ۳ - الف) وجود حد تابع $f(x, y, z) = \frac{xy - yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ را در نقطه $(0, 0, 0)$ بررسی کنید.

۱۰ نمره ب) اگر $z = f(u, v)$ ، $u = x^3 - y^3$ و $v = x^4 y^3$ ، مقدار $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را به دست آورید.

سوال ۴ - ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y$ را روی ناحیه محدود به

۱۵ نمره خطوط $x = y$ ، $x = 1$ و $y = 0$ را بیابید.

موفق باشید



جواب سوال ۱: ابتدا معادله فصل مشترک دو صفحه P_1 و P_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 2 \begin{cases} 7x - 4y + 7z + 5 = 0 \\ 4x + 3y - 2z + 6 = 0 \end{cases} &\rightarrow 42x + 13y + 52 = 0 \rightarrow x = -\frac{13y + 52}{42} \\ 3 \begin{cases} 7x - 4y + 7z + 5 = 0 \\ 4x + 3y - 2z + 6 = 0 \end{cases} &\rightarrow 37x + 13z + 39 = 0 \rightarrow x = -\frac{13z + 39}{37} \end{aligned}$$

معادله فصل مشترک دو صفحه عبارت است از $x = -\frac{13y + 52}{42} = -\frac{13z + 39}{37}$ و یا $L: \frac{x}{-13} = \frac{y+4}{42} = \frac{z+3}{37}$

بردار نرمال صفحه مورد نظر بر بردار هادی این خط و بر بردار نرمال صفحه P_2 عمود است بنابراین

$$N = (1, -1, -2) \times (-13, 42, 37) = (47, -11, 29)$$

اکنون معادله صفحه شامل خط L و عمود بر صفحه P_2 برابر است با: $47x - 11(y+4) + 29(z+3) = 0$ و یا $47x - 11y + 29z + 43 = 0$

جواب سوال ۲: داریم $z = x^2 + y^2$ و در نتیجه $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t^2$

بنابر این منحنی روی سهمیگون $z = x^2 + y^2$ واقع است.

$$r'(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 2t) \rightarrow r''(t) = (-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t, 2)$$

$$r'(\pi) = (-1, -\pi, 2\pi) \rightarrow r''\left(\frac{\pi}{2}\right) = (\pi, -2, 2) \rightarrow r'(\pi) \times r''(\pi) = (2\pi, 2 + 2\pi^2, 2 + \pi^2)$$

$$|r'(\pi) \times r''(\pi)| = \sqrt{4\pi^2, (2 + 2\pi^2)^2 + (2 + \pi^2)^2} = \sqrt{4 + 16\pi^2 + 5\pi^4}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{1 + \pi^2 + 4\pi^2} = \sqrt{1 + 5\pi^2} \rightarrow k(\pi) = \frac{\sqrt{4 + 16\pi^2 + 5\pi^4}}{(\sqrt{1 + 5\pi^2})^2}$$

جواب سوال ۳: الف) تابع $f(x, y, z) = \frac{xy - yz}{x^2 + y^2 + z^2}$ در نقطه $(0, 0, 0)$ حد ندارد. دو مسیر متفاوت وجود دارد که مقادیر حد

در آنها با هم برابر نیستند. اگر روی محور x ها حرکت کنیم داریم: $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy - yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{(x,0,0) \rightarrow (0,0,0)} \frac{0}{x^2} = 0$

اگر روی خط $x = y = -z$ حرکت کنیم داریم: $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy - yz}{x^2 + y^2 + z^2} = \lim_{(x,x,-x) \rightarrow (0,0,0)} \frac{2x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -3y^2 f_u + 3x^2 y^2 f_v \quad (ب)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3y^2 \frac{\partial f_u}{\partial x} + 12x^2 y^2 f_v + 3x^2 y^2 \frac{\partial f_v}{\partial x}$$

$$= -3y^2 \left(\frac{\partial f_u}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 12x^2 y^2 f_v + 3x^2 y^2 \left(\frac{\partial f_v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f_v}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$= -3y^2 (3x^2 f_{uu} + 4x^2 y^2 f_{uv}) + 12x^2 y^2 f_v + 3x^2 y^2 (3x^2 f_{vu} + 4x^2 y^2 f_{vv})$$

$$= -9x^2 f_{uu} - 12x^2 y^2 f_{uv} + 12x^2 y^2 f_v + 9x^2 y^2 f_{vu} + 12x^2 y^4 f_{vv}$$

جواب سوال ۴: ابتدا داخل ناحیه را بررسی می‌کنیم. $f_x = 2x - 3y$, $f_y = -3x + 2$. اگر درون ناحیه اکسترمم موضعی موجود

باشد باید $f_x = 2x - 3y = 0$, $f_y = -3x + 2 = 0$ که نتیجه می‌دهد $A_1 : x = \frac{2}{3}, y = \frac{4}{9}, z = \frac{4}{9}$

روی خط $x = y$ داریم $f(x, x) = f_1(x) = -2x^2 + 2x$ و اگر $f'_1(x) = -4x + 2 = 0$ آنگاه

$$A_2 : x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$$

روی خط $y = 0$ داریم $f(x, 0) = f_2(x) = x^2$ و اگر $f'_2(x) = 2x = 0$ آنگاه $A_3 : x = 0, y = 0, z = 0$

روی خط $x = 1$ داریم $f(1, y) = f_3(y) = -y + 1$ و $f'_3(y) \neq 0$

در نقاط گوشه ای ناحیه هم داریم :

$$A_4 : x = 1, y = 1, z = 0, \quad A_5 : x = 1, y = 0, z = 1, \quad A_6 : x = 0, y = 0, z = 0$$

نقطه A_1 ، نقطه مینیمم موضعی تابع است. مقدار ماکزیمم مطلق تابع در ناحیه داده شده برابر ۱ است که در نقطه A_5 اتفاق

می افتد و مقدار مینیمم مطلق تابع در ناحیه داده شده برابر ۰ است که در نقاط A_3 و A_6 اتفاق می افتد.

سیدرضا موسوی